MISCELÁNEOS | MISCELÂNEOS | DIVERS

Fermentario N. 9, Vol. 2 (2015)
ISSN 1688 6151

Instituto de Educación, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, Universidad de la República. www.fhuce.edu.uy

Faculdade de Educação, UNICAMP. www.fe.unicamp.br

Centre d'Études sur l'Actuel et le Quotidien, Sorbonne. www.ceaq-sorbonne.org

---

Movimento paralizante: reflexões sobre o infinito em Zenão de Eléia

Alexandrina Monteiro[1]

Resumo

Esse texto emerge de inquietações relacionadas a abordagem do tema infinito no campo da educação matemática. Entendemos que este tema atravessa diversos campos de saber possibilitando diferentes tipo de conexões às quais podem nos indicar formas outras de discutir e abordar a ideia de infinito no ensino da matemática. Mas, o que seria o infinito? O infinito seria algo a ser experienciado? Seria o infinito alguma coisa que escapa de nossa possibilidade sensorial, física? Em geral pensamos no infinito como algo não finito, que não tem fim. Como experienciar algo sem fim em nossa finitude? Seria isso possível? Frente a essas questões optou-se aqui por problematizar a questão do infinito a partir das discussões elaboradas por Zenão de Eléia (430 aC). Sua discussão problematiza a questão do movimento e do tempo por meio de paradoxos que tinham por objetivo defender seu mestre Parmênides frente aos paradigmas propostos pelos pitagóricos e por Heráclito. Nossa aposta é que o movimento produzido pelas possíveis conexões e provocações desses paradoxos pensados numa perspectiva que articule, entre outros campos a filosofia e matemática potencializem pensamentos outros que rompam com as estruturas disciplinares abrindo espaço para pensamentos transgressores no campo da educação matemática.

[1] Professora membro dos grupo de pesquisa PHALA – Unicamp. Email: math_ale@uol.com.br

Palavras-Chave: Zenão de Eléia, infinito, Filosofia, educação matemática

Movimiento paralizante: reflexiones sobre el infinito en Zeno Elea

Resumen

Este texto surge de las preocupaciones relacionadas con el tema de infinito en el campo de la educación matemática. Entendemos que este tema atraviesa muchos campos del conocimiento que permite diferentes tipos de conexiones que pueden indicar otras formas de discutir y abordar la idea de infinito en la educación matemática. Pero lo que sería infinito? El infinito sería algo a ser experimentado? Sería el infinito algo que escapa a nuestra capacidad sensorial, física? Generalmente pensamos en el infinito como algo no finito, que no tiene fin. ¿Pero, como se experiencia algo sin fin en nuestra finitud? ¿Sería eso posible? Frente a estas preguntas elegimos aquí el problema de lo infinito a partir de las discusiones elaboradas por Zenón de Elea (430 aC). Su discusión se centra en la cuestión de movimiento y el tiempo a través de paradojas que pretendían defender a su maestro Parménides frente a los paradigmas propuestos por los pitagóricos y Heráclito. Nuestra apuesta es que el movimiento producido por las posibles conexiones y provocaciones de estas paradojas elaborado en una perspectiva que articula los campos de filosofía y matemáticas apalancamiento otros pensamientos que rompen con las estructuras disciplinarias haciendo espacio para la construcción de los delincuentes pensamientos de la educación matemática.

Palabras clave: Zenón de Elea, el infinito, la filosofía, la educación matemática**.**

Paralyzing movement: reflections on the infinite in Zeno of Elea

Abstratic

This text emerges from concerns related to infinity theme approach in the field of mathematics education. We understand that this issue crosses many fields of knowledge enabling different kind of connections which may indicate other ways in discussing and addressing the idea of infinity in mathematics education. But what would be infinite? The infinite would be something to be experienced? It would be infinity something that escapes our sensory ability, physical? Generally we think of the infinite as something not finite, that has no end. As experience something endless in our finitude? Would that be possible? Faced with these questions we chose here to discuss on the question of the infinite from the discussions elaborated by Zeno of Elea (430 BC). His discussion problematises the issue of movement and time through paradoxes that aimed to defend his master Parmenides front of the paradigms proposed by the Pythagoreans and Heraclitus. Our bet is that the movement produced by the possible connections and provocations of these paradoxes thought a perspective that articulates, among other fields philosophy and mathematics leverage

other thoughts that break with the disciplinary structures making room for offenders thoughts in the field of mathematics education.

Keywords: Zeno of Elea, infinity, philosophy, mathematics education

1. Introdução

A ideia de infinito, quando abordada no contexto da matemática escolar, em geral, se refere a duas percepções: numa o infinito significa um limite que nunca se atinge, como a ideia do conjunto infinito de números naturais, ou seja, 1,2,3,4,5... cuja sequência continua infinitamente, não tem fim. Outra é a infinidade de números entre dois números, ou seja, o infinitamente pequeno, no sentido de uma sequência que converge é o caso das dízimas periódicas como 1/3 = 0,333....Mas, no caso dessa convergência temos um problema a mais que envolvem os números irracionais. Vamos pensar no caso da $\sqrt{2}$ que pode ser escrita na forma de uma dízima infinita não periódica 1,414214... Como essa dízima pode ser representada por uma sequência infinita de números racionais que se aproximem crescentemente de $\sqrt{2}$ mas nunca ultrapassar seu valor?[2] Essas questões foram discutidas pelo matemático alemão Georg Cantor – e não é nossa intenção discutir aqui – mas apenas pontuar que são elas que circulam pelo ambiente escolar e que muitos dos argumentos utilizados por esse matemático foram inspirados em discussões que se sucederam pelo protagonista de nosso texto ou melhor pelos paradoxos propostos por Zenão de Eléia.

Apesar da complexidade envolvida no tema sobre infinito, o mesmo atravessa outros campos e nos mobiliza para outras direções. Mas, o que seria o infinito? O infinito seria algo a ser experienciado? Seria o infinito alguma coisa que escapa de nossa possibilidade sensorial, física? Ou, a ideia de infinito seria uma possibilidade de pensamento, não algo em si, mas a dimensão de algo, uma dimensão que nos escapa? Em geral pensamos no infinito como algo não finito, que não tem fim. Como experienciar algo sem fim em nossa finitude? Seria isso possível?

Os poetas usam o infinito para nos afetar, para nos tocar. Vinicius de Morais fala de um amor *infinito* enquanto dure – do que se trata esse *amor infinito*? Algo que

[2] Cantor resolve essas questões de maneire muito interessante. Nesse caso ver artigo de Vilela neste próprio livro;Vilela(1996); Vilela, Dorta(2010); Vilela, Monteiro (2013); Garbi (2009).

é infinito mas que pode terminar (*enquanto dure*)? Um infinito que é finito? Poderia ser assim o amor infinito? Mas, seria ele finito se foi infinito enquanto durou? Um infinito que terminou? O infinito de Vinicius nos fala de tempo-duração ou tempo-intensidade? Qual a diferença? Manoel Bandeira em um de seus belos poemas diz que o infinito do escuro lhe enlouquece[3]. O que seria o infinito do escuro? Uma total ausência de luz? Mas ausência por quanto tempo? Estaria a ideia de infinito relacionada a ideia de tempo? Tempo como duração? Do que falamos quando nos remetemos ao infinito?

Como experienciar algo numa dimensão infinita? Como saber sobre o infinito num tempo finito? Como compreender o que denominados por *infinito*? Que sentidos esse termo possui em diferentes jogos de linguagem em que são acessados? No campo da matemática seria esse termo passível de definição, demonstração? Algo que no jogo da linguagem poética nos aprece tão sensível, sensorial seria passível de racionalização por meio das regras da matemática formal? Que sentidos essa racionalidade nos possibilita? De que forma seriam eles elaborados e discutidos em outro campo, no campo da matemática escolar?

Certamente não eram essas as questões de Zenão de Eléia que viveu por volta de 430 aC.. Naquela época esse pensador, com o objetivo de defender as teses de seu mestre Parmênides. Assim, seus paradoxos tinham por objetivo se contrapor a alguns dos paradigmas de sua época especoalmente os propostos pelos pitagóricos e por Heráclito.

Nosso interesse aqui, ao discutir os paradoxos de Zenão – o que em si não traz muitas novidades já que este vem sendo discutido desde Platão, é da ordem da prática, do prazer. Ou seja esperamos que o leitor ao se desfrutar dos problemas propostos por Zenão na forma de paradoxos possa propor e criar situações que possibilite acessar o patamar do aprender, desbravar caminhos outros para pensar relações entre discreto e contínuo, o movimento, o tempo e o espaço. Acredito que é esse o convite que os paradoxos de Zenão nos faz ainda hoje.

---

[3] Quero apalpar o som das violetas.
Ajeito os ombros para entardecer.
Vou encher de intumências meu deserto.
Sou melhor preparado para osga.
O infinito do escuro me perena.
O livro das ignorâncias
Manoel de Barros

Nesse sentido, me aprece necessário compreender o contexto de em que tais problemas foram formulados. Ou melhor, o potencial dos paradoxos do pensador de Eléia, emergem quando compreendemos suas razões de ordens éticas mas, também pedagógicas de defender um ponto de vista e, a construção de sua proposta que para muitos estudiosos inaugura o raciocínio dialético e o da redução ao absurdo.

O texto se divide em três partes, inicialmente vamos visitar as ideias de Parmênides com o objetivo de compreender em que contexto emergem os paradoxos. Em seguida focaremos Zenão e em especial os paradoxos e seus efeitos ou seja, algumas das discussões que os mesmos possibilitaram para finalmente refletirmos sobre as potencialidades pedagógicas do mesmo.

2. Visitando Parmênides

Os paradoxos de Zenão ou os problemas elaborados por Zenão, segundo Platão tem a direta relação com a defesa das teses de seu mestre, Parmênides. Ou seja, os problemas que Zenão propõe é um convite para à reflexão de algumas das teses propostas por seu mestre em especial, as relacionadas à *ilusão do movimento* dentro do debate provocado por Parmênides ao se contrapor à noção de Cosmo como algo discreto – conforme propunha os pitagóricos.

Acredita-se que Parmênides nasceu em Eléia, colônia Grega localizada ao Sul da Itália provavelmente entre os anos de 515-510 aC. Apesar de existirem várias hipóteses sobre a vida e sobre a produção de Parmênides em diferentes campos da ciência[4], os registros escritos que foram preservados pela doxografia[5] resumem-se em um conjunto de 160 versos de um poema que lhe teria sido ditado por uma deusa sendo assim, ele se considerava enunciador de uma verdade revelada pela fala do *divino*. Segundo RODIGUES (2009):

> Originalmente , o poema atribuído a Parmênides seria, provavelmente dividido em duas partes: a primeira, um tratado sobre o Ser e a segunda, da física ou sistema de mundo. No poema a ênfase recai sobre os problemas relacionados ao Ser e aos princípios quanto ao conhecimento

---

[4] Sabemos muito pouco sobre Parmênides. Achados arqueológicos da cidade de Vélia (antiga Elelia) comprovariam a presença de ideias de Parmênides nas práticas da medicina no Período Romano.

[5] Doxografia deriva da palavra grega (doxa), que significa aparecer; opinião e da palavra (grafia); escrita; descrição. Assim, Doxografia é o relato das ideias de um autor quando interpretadas por outro autor, ao contrário do *fragmento*, que é a citação literal das palavras de um autor por outro. O termo foi cunhado pelo alemão Hermann Diels em sua obra Doxographi Graeci publicada em Berlim em 1979. MITIDIERI (p.24)

> verdadeiro, dado que Parmênides estabelece distinção entre a verdade (aletheia) e aparência (doxa). (p.234)

Nesse poema é uma deusa quem lhe apresenta os dois caminhos: o da verdade e o da aparência. O da verdade é o caminho daquilo que ***é***, a realidade verdadeira, a *aletheia* e o da aparência é o caminho das ilusões o das *doxas,* que deve ser evitado pois, pensar é para o filósofo, ater-se à verdade. Porém, Reinhardt[6] afirma que essa duas partes do poema de Parmênides não podem ser vistas de forma dissociada ou seja, segundo ele, para Parmênides não se pode pensar uma parte [*aletheia*] sem a outra [*doxa*] e somente por sua reunião é que elas produzem um todo[7] (Beaufret,1978, p. 168).

Diante dessa revelação Parmênides argumenta que não existe distância entre o que ***é***, o que existe como realidade e o que é pensado pois, tudo aquilo que pensamos, na condição de estarmos pensando ou enunciando uma verdade deve *existir*, deve *ser.* Para ele o princípio do pensar verdadeiro está no *Ser*. Mas o que isso significa?

Ao assumir o *Ser* como princípio ele se opõe aos princípios físicos e mutáveis de Heráclito e da escola de Jônica, como também à escola pitagórica para a qual ao princípio da multiplicidade e a unidade numérica eram a origem do mundo. Em outros termos, Parmênides nega como princípio os elementos naturais como: água, ar fogo ou abstratos como o número e movimento e *se serve de um conceito universal que possa reunir a totalidade daquilo que existe* (Maciel Junior, 2003, p.88). Ao se opor a essas duas escolas, ele opta pela via do pensamento: *o ser enquanto ser* e profere sua máxima, que irá atravessar o pensamento filosófico ocidental: *o ser **é** e o não-ser **não é**.*

Mas o que significa pensar que o *ser **é***? O que significa pensar o ser como princípio? Segundo Maciel Junior (2003):

> A palavra ser - *éon* , em grego – é usada como substantivo singular, e plural, no masculino e no feminino e no neutro. Assim, ela serve para designar tudo aquilo que existe; e todas as coisas existentes podem ser designadas por um nome comum: o ser. Por exemplo: montanha, homem, rio, são seres. (...). Assim, um homem ***é***, um cavalo ***é***, um rio ***é***, e tudo

---

[6] Reinhardt, Karl (1886 - 1958) foi um filólogo e historiador do pensamento antigo. Foi prof. em várias universidades da Alemanha. Seus principais estudos foram sobre Parmênides, Ésquilo, Sófeles.

[7] Segundo Beaufret (1978) "O abismo que separa um mundo de simples aparências, onde estamos decaídos desde o nascimento e onde devemos cumprir uma carreira provisória, e um mundo de verdade, o de nossa salvação eterna ou da nossa perdição, já se abria suficientemente para que Nietzsche tenha podido, não sem fundamento, falar do cristianismo como de um "platonismo para uso popular" [....] A experiência da condição humana, dominada pelas categorias específicas da queda e da salvação, já se encontra subjacente ao poema de Parmênides.

> que possui existência também pode ser designado pela palavra ser. (p.87. grifo meu)

Apesar dos poucos fragmentos de seu poema, Parmênides já era reconhecido em sua época. Platão[8] e Aristóteles[9] fazem referencias à ele. O primeiro sugere que Sócrates, ainda jovem, tenha se encontrado pessoalmente com Parmênides e ambos – Platão e Aristóteles –; apresentam os problemas de seu discípulo – Zenão de Eléia.

Segundo Casertano (2007) podemos considerar Parmênides como o filósofo que introduziu o pensamento que a tradição filosófica ocidental denomina por metafísico e ontológico[10], ou seja, ele introduziu um modo de pensar, um discurso conceitual que visa a compreensão do que existe na totalidade – a noção de Ser.

E, é nesse contexto de refutação e confronto que Parmênides propõe suas ideias sobre o cosmos segundo o paradigma da continuidade, nesse sentido Casertano (2007) destaca a importância e a atualidade das ideias e das polêmicas em torno das mesmas propostas pelo mestre de Zenão na Grécia antiga, ou seja:

> [...] Parmênides pensou o cosmo segundo o paradigma da continuidade: à descontinuidade de uma realidade composta e estruturada por números-unidades, sustentada pelas antigas doutrinas pitagóricas, ele contrapõe uma concepção do cosmo que tem as características do *oulomelés* do *hen* e do *synechés*, isto é, da compacidade, da unidade e da continuidade. A importância dessa polemica, que nasce na Grécia de 2500 anos atrás, a polemica acerca do *continuum-discretum* que opunha na Antiguidade Parmênides aos Pitagógricos, torna-se evidente que se pensarmos no fato de que, ainda hoje, as discussões entre os que sustentam teorias ondulatórias e os que sustentam teorias corpusculares não aprecem ter encontrado um acordo definitivo; basta mencionar os grandes nomes de Planck, de De Broglie, de Einstein, de Heisenberg ou de Schrodinger. (p.311)

Morris (1998) destaca que Parmênides pode ser considerado o primeiro racionalista, isto é, o primeiro filósofo a se guiar pela razão se opondo aos sentidos que emergem da experiência cotidiana, do senso-comum. O filósofo afirmava que a

---

[8] Num dialogo denominado *Parmênides*, Platão apresenta um Sócrates ainda jovem que discute com Zenão e seu mestre as teorias das formas. (Morris, 1998)

[9] Aristóteles apresenta e discute –os paradoxos de Zenão com intuito de refutá-los e reconhece neles uma defesa às teorias de Parmênides. (Morris, 1998)

[10] Ontologia foi um termo criado no séc. XVII por R Goclenius que refere-se ao modo de pensar ou ao discurso conceitual que visa a compreensão do que existe na totalidade. Ontologia é composto pelas palavras to ón (o ser) e logos (discurso) – significando o discurso sobre o *ser* enquanto *ser*, isto é, do *ser* enquanto conceito universal. CASTRO (2007)

realidade era uma unidade imutável, que chamava de Um e, nesse sentido, o movimento, a mudança, a multiplicidade seriam ilusões (do campo das doxas) e os que acreditavam em sua realidade estavam sendo enganados pelo sentido. Dessa forma, suas ideias foram objeto de polêmicas mas também de zombarias. E, foi com o intuito de defender as teses de seu mestre que Zenão formula uma série de argumentações sobre o movimento. Ele compõe esses argumentos na forma de paradoxos, como discutiremos a seguir.

3. Encontrando Zenão de Eléia

Zenão de Eléia, destacou-se em seu tempo por muitas de suas participações políticas e também por seu importante desempenho no campo da filosofia. Foi discípulo de Parmênides e deve ter nascido por volta de 489 aC.

As informações a sobre seu pensamento encontram-se nas obras de Platão, Aristóteles e Diógenes Laércio. Segundo esses autores Zenão seria autor de várias obras sobre ciência e filosofia de sua época e defendeu fervorosamente as ideias de seu mestre Parmênides. Se o mestre é reconhecido por ser iniciador do pensamento operado pelos conceitos universais que se organizam em conformidade com os princípios da identidade e não-contradição (o que é, é; o que não é, não é. Hoje equivalente ao pensamento da Lógica Clássica do terceiro excluído), o discípulo Zenão destaca-se pelo uso do pensamento dialético.

Na Grécia antiga dialética era a arte de discutir. No campo da Política era a arte da argumentação e não só possuía como finalidade a vitória, como também visava à destruição do argumento adversário. Para Hegel (1978) a principal característica de Zenão é a dialética. Zenão seria segundo ele o iniciador do pensamento dialético. E ainda, ele argumenta que o fato da dialética ter atraído a atenção de Zenão primeiro para problemas de movimento (se refere aos problemas dos paradoxos propostos por Zenão que veremos mais à frente) é *pelo fato da dialética ser ela mesma este movimento ou movimento mesmo ser a dialética de todo o ente*. (p.202) Nesse mesmo sentido, Maciel Jr. (2003) afirma que:

> (...) da Política para a Filosofia, Zenão operou um transporte levando a argumentação para o plano do pensamento, ele incorporou a contradição no exercício de pensar e inventou o método dialético que consistia em: confrontar teses opostas, em estabelecer entre essas teses contradições que provassem que elas não eram verdadeiras, ou que simplesmente

> evidenciassem o aspecto contraditório de suas conclusões. (Maciel Jr. 2003,p.95)

O objetivo de Zenão ao propor os paradoxos[11] que problematizam a questão do movimento era defender as ideias de seu Mestre as quais se opunham às ideias, como já anunciamos, dos Pitagóricos e de Heráclito. Ou seja, em relação aos primeiros Parmênides e Zenão e seus seguidores se opunham a um sistema que se apoiava na ideia de multiplicidade, mudança bem como na ideia do número como essência de todas as coisas. Nesse sentido, para os pitagóricos, a medida de grandezas possuía uma dimensão unitária – mônadas – considerada o menor segmento. Disso concluíam que um segmento (finito) poderia ser dividido em infinitas mônadas. Portanto, para os discípulos de Pitágoras de Samus (580 a.C. - 497 a.C.) o espaço era composto por pontos e o tempo por instantes que poderiam ser divididos infinitamente.

Heráclito (cerca de 450-380 a.C.) assim como os pitagóricos, apoiava-se na ideia de mudança. Este afirmava que o ser é inseparável do movimento. Para ele, não há repouso senão com a mudança. Este pensador é muito conhecido pela celebre frase: um homem não entre duas vezes no mesmo rio. (Morris, 1998)

É contra essas ideias que o pensador de Eléia propõe seus paradoxos. Ou seja, ele pretende argumentar inicialmente afirmando os princípio da divisão do tempo e do espaço de forma infinita, como também se refere num dos paradoxos sobre a questão do repouso, mas em todos os casos, sua intenção é mostrar que ao assumir esses pensamentos como verdade se chega a uma contradição.

Opor-se a ideia do movimento, da multiplicidade é reconhecer o absoluto, é considerar toda a mudança algo aparente, logo algo que faz parte do caminho da opinião, da *doxa* e não do pensamento verdadeiro da *aletheia*. Esse último – o caminho da verdade – na perspectiva de Zenão e de seu mestre – neste caso – significar crer que há uma identidade entre o ser e o pensamento, os que levam a pensar no ser como algo imóvel, e o movimento como a negação do ser. (LEGRAND,1991)

---

[11] Um **paradoxo** é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum. Em termos simples, um paradoxo é "o oposto do que alguém pensa ser a verdade". A identificação de um paradoxo baseado em conceitos aparentemente simples e racionais tem, por vezes, auxiliado significativamente o progresso da ciência, filosofia e matemática. O objetivo do paradoxo é tornar o pensamento incapaz de encontrar uma resposta. É a exposição de argumentos sem solução. (Maciel Jr. 2003)

Segundo uma anedota contada pelos historiadores do pensamento grego, Diógenes de Apolônia – pensador cínico – ridicularizava as teses de Parmênides, andando de um lado para o outro dizendo: "*o ser é imóvel*". E, é para combater , os argumentos dos defensores do múltiplo de do movimento que Zenão propõe quatro paradoxos sobre o movimento: a dicotomia, a corrida entre Aquiles e a tartaruga, a flecha e o estádio que passaremos a discutir a seguir.

4. O que (contra)diz os Paradoxos?

Segundo Platão (2003), os problemas de Zenão têm por objetivo defender as teses de Parmênides. Num de seus *Diálogos*, especificamente num denominado Parmênides, Platão diz:

> [...] esses escritos prestam uma assistência ao argumento de Parmênides contra os que tentam caricaturá-lo, [dizendo que], se o um é, resulta para o argumento ser afetado por coisas múltiplas e ridículas, e mesmo contrapõe ele próprio. Assim sendo, esse escrito contesta os que dizem [haver] o múltiplo , e lhes devolve na mesma moeda, com juros, ao querer demonstrar que a hipótese deles, de há múltiplas coisas, seria afetada por coisas ainda mais ridículas do que [a hipótese] de que um ***é***, se elas fossem desenvolvidas suficientemente. (Parmênides, 128 c-d)

Conforme já afirmado deve-se destacar que ao defender seu mestre Zenão fez uso da dialética como um instrumento da razão, como um método do pensamento proporcionando que a dialética deixasse de ser unicamente uma técnica política para se tornar uma teoria geral do *Logos*. E, tomou como tema a questão do movimento. Rodrigues (2009) afirma que Zenão buscou impor um novo olhar sobre as coisas percebidas pelos sentidos, demonstrando que *os movimentos observados através da sensibilidade são aparências ilusórias que não podem ser confundidas com o Ser*. (p.237).

Sigamos então para os Paradoxos, afinal, seria o movimento uma ilusão?

A experiência do movimento pode ser considerada uma das que mais afetam nosso mundo sensível, não sem gerar muitos questionamentos. Nesse sentido vale ressaltar que o pensador de Eléia não nega a percepção que temos do movimento, do múltiplo e da variação, mas, ele quer demonstrar que aos olhos da razão a experiência imediata do movimento é irracional e absurda, reafirmando assim, a tese parmediana da imobilidade do Ser. Ao que se contrapõe Aristóteles dado que para este último movimento é mudança. Seguiremos os paradoxos na ordem proposta por Aristóteles em sua obra intitulada *Física* na qual ele diz que: *Zenão formulou quatro suposições sobre o movimento que produziriam grande perplexidade a todos quantos intentaram resolvê-los.* (Física VII, 9, 239b)

4.1 Paradoxo da Dicotomia

Segundo esse paradoxo a impossibilidade do movimento se dá pelo fato do objeto móvel ter de atingir primeiro a metade, antes de concluir a metade. Ou seja, Suponha que um corredor [C] parta do ponto [A] em direção ao ponto [B]. Ao partir de A em direção a B, antes de chegar em B ele deve atingir o ponto A' que é a metade de [AB], e, antes de atingir A' ele deverá ter atingido A'' que seria a metade de [AA'] e assim, sucessivamente, sem nunca conseguir se movimentar em direção ao ponto B. Este argumento é classicamente denominado *reductio ad absurdim*.

Para melhor compreender o argumento, acompanhe as argumentações:

1) O espaço [AB] é composto por um número infinito de pontos e, o corredor [C] deve se deslocar de A para B, ou seja: [A➔B]

A ....C➔.. B [A➔B]

2) Antes de chegar a B, o corredor [C] deve atingir A'. AA'= [1/2 AB], mas antes deve atingir A''. AA'' = [1/2 AA' ou ¼ AB], por sua vez, antes disso deve atingir A'''. AA'''= [1/2 de AA'' ou 1/8 de AB]. Ou seja, o corredor será impedido de se movimentar pois para atingir um ponto A' qualquer deve atingir primeiro um ponto A'' cuja distância da saída é a metade do que deveria ter percorrido, como segue:

A ....C➔............................ B [A➔A'➔B]

A ....C➔..........C➔............................ B [A➔A'➔A''➔B]

A ....C➔....C➔.....C➔............................ B [A➔A'➔A''➔A'''➔B]

3) Assim, o corredor [C] não poderá atingir o ponto B num tempo finito, já que o espaço AB é composto por um numero infinito de pontos.

Desse modo, podemos inferir que o espaço e tempo aqui considerados são infinitamente divisíveis, (tese defendida pelos pitagóricos), mas, seria impossível percorrer num tempo finito o espaço pressuposto como infinitamente divisível ou seja, não se pode percorrer uma distancia infinita de pontos num tempo finito. Há uma incompatibilidade entre o tempo finito da corrida e a infinitude da divisibilidade espacial o que gera um absurdo, já que todos nós nos movimentamos.

Dessa forma, Zenão mostra que tomando por base uma noção de espaço e tempo como infinitamente divisíveis, quer se concebam espaço e tempo como divisíveis finitamente, portanto, dotados de unidades últimas indecomponívies, sempre a noção de movimento conduzirá a absurdos como a impossibilidade do movimento. Quero ressaltar aqui o fato de que com isso, Zenão não negou a realidade sensível do movimento pela mesma razão que Parmênides não distingue a "realidade sensível" e a "a outra", ao mesmo tempo em que não se permitia reduzir uma à outra. a esse respeito diz Hegel:

> Aristóteles escreve que Zenão negou o movimento porque este contem uma contradição interna. Não se deve interpretar essa afirmação como a negação da existência do movimento, como quando dizemos que existem elefantes mas não unicórnios. Que o movimento exista, que esse fenômeno exista – isso não pode ser questionado. Pela certeza sensível, o movimento existe exatamente como os elefantes. Zenão nunca teve a ideia de negar o movimento nesse sentido. O que se deve entender é a sua verdade; ora, para Zenão o movimento é não-verdadeiro, porque é contraditório. (Hegel apud Legrand, 1991, p.104)

Mas, como dissemos, os argumentos de Zenão acerca do movimento que causam tanta perturbação àqueles que tentam solucioná-los são quatro. Assim, passemos as considerações do Segundo argumento.

3.2 Paradoxo da Corrida entre Aquiles e a Tartaruga

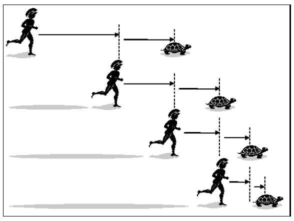
Este segundo paradoxo chamado de argumento de Aquiles propõe que o mais lento dos animais jamais será vencido quando um corredor por mais veloz que seja lhe permitir uma vantagem inicial. Assim, nesse argumento são preconizadas duas personagem: Aquiles – o mais veloz dos guerreiros e uma Tartaruga – uma das mais lentas das criaturas. Podemos enunciar esse paradoxo como segue:

Suponha que o veloz guerreiro Aquiles deve disputar uma corrida com uma tartaruga. Sendo de longe mais lenta dos dois, a tartaruga é autorizada a começar num ponto certa distancia à frente. Mas, nesse caso, diz Zenão, Aquiles jamais conseguirá alcançar seu adversário. Pois, para isto ele precisa primeiro chegar ao ponto do qual a tartaruga partiu. A essa altura a tartaruga já terá avançado até algum ponto adiante na pista de corridas. E quando Aquiles alcançar esse ponto, a tartaruga terá avançado ainda mais. É obvio, afirma Zenão que a série é interminável. Haverá sempre uma distancia por menor que seja, entre os dois competidores.

O que Zenão está dizendo é que Aquiles deve efetuar uma série infinita de atos, algo que não pode ser feito num período de tempo finito. Se preferirmos não acreditar nisso, temos que demonstrar onde reside a falácia. Segundo Morris (1998) o objetivo de Zenão com esse paradoxo, era rebater a ideia de que o espaço e o tempo eram infinitamente divisíveis. Para isso descreve uma situação absurda em que Aquiles tem que transpor uma série de distâncias que ficam progressivamente mais curtas gerando um absurdo o que nos impede de pensar em dividir o espaço dessa maneira.

Para compreender um pouco mais esse paradoxo, Morris (1998) propõe a seguinte situação: considere que Aquiles corra exatamente duas vezes mais depressa que a tartaruga. Veja que essa escolha foi aleatória. Aquiles poderia correr 3 vezes ou 10 vezes mais. Além disso, ao considerar esse fato, em nada se altera a natureza do paradoxo. Considere também que a vantagem dada à tartaruga foi de 10 metro e que Aquiles precisa de um segundo para completar a primeira fase da corrida, isto é para chegar ao ponto de partida da tartaruga. Escolha essa também aleatória. Assim, está se considerando que em um segundo Aquiles correu 10 metros e que ele corre duas vezes mais rápido que a tartaruga, esta última terá corrido 5 metros em 1 segundo[12].

Diante disso, Aquiles precisará de apenas ½ segundo para completar a segunda etapa; bem como ¼ de segundo para a completar a terceira e assim sucessivamente como mostra a imagem[13].



Podemos também podemos organizar os argumentos propostos nessa proposta do paradoxo, a partir da tabela como segue:

Aquiles	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**	**6ª**	**...**	**18ª**	**...**
Tempo (s) para **uma** etapa	1	$^1/_2$	$^1/_4$	$^1/_8$	$^1/_{16}$	$^1/_{32}$	...	$^1/_{132.072}$	...

12 Morris destaca a impossibilidade dessa velocidade proposta a Aquiles e a Tartaruga, e argumenta que está utilizando valores que facilitem a aritmética.
13 http://aristocratas.wordpress.com/24/07/2012/monotonia-em-serie/

Tempo total transcorrido ao **final** de “x” etapas	**1**	1+ ½ = 3/2 = **1,5**	1+ ¾= 7/4= **1,75**	1+ 7/8= 15/8= **1,88**	1+ 15/16= 31/16= **1,94**	1+ 31/32= 63/32= **1,97**	…	1+132.071/132.072= 1,9999924283...

A impressão que temos é que o total de tempo se aproxima cada vez mais de 2 segundos, que seria o momento em que Aquiles ultrapassaria a tartaruga. Mas, veja que isso não refuta o paradoxo, pois Zenão não disse que Aquiles não alcançaria a tartaruga depois de um tempo finito. Ele certamente sabia que isso aconteceria. O que Zenão afirma nesse paradoxo é que é impossível para Aquiles efetuar um número infinito de atos ou etapas da corrida (num espaço finito)

Veja que Zenão está dividindo o tempo em partes cada vez menores, gerando um conjunto infinito de frações e, se de fato o tempo pode ser dividido infinitamente, Aquiles sempre está um tempo infinitamente pequeno atrás da tartaruga.

Na forma proposta por Zenão, para Aquiles ultrapassar a Tartaruga, ele deveria ultrapassar o infinito o que seria impossível, ou seja – analise os argumentos:

1) Zenão introduz um segundo corpo, havendo assim um movimento relativo entre dois corpos [Aquiles (A) e a Tartaruga(T)]. Ou seja, o movimento de Aquiles depende de um referencial que é a Tartaruga. Ou seja, o espaço entre Aquiles e a Tartaruga tende a zero, mas nunca chega no zero, logo não permite ultrapassar a Tartaruga.
2) O movimento aqui considerado não é contínuo, mas sim uma sucessão de infinitos saltos de infinitos instantes.

Esse segundo argumento é tratado por Bérgson no texto A Evolução Criadora, na qual ele argumenta que o mecanismo de nosso conhecimento usual é de natureza cinematográfica, ou seja:

> (...) Cada um de nossos atos visa uma certa inserção de nossa vontade na realidade. Consiste num arranjo entre nosso corpo e os outros corpos comparável ao dos pedaços de vidro que compõem uma figura caleidoscópica. Nossa atividade vai de um arranjo para um rearranjo, cada vez imprimindo no caleidoscópio uma nova sacudidela, sem dúvida, mas não se interessando pela sacudidela e vendo apenas a nova figura. (...) poder-se-ia dizer que o caráter cinematográfico de nosso

> conhecimento das coisas prende-se ao caráter caleidoscópio de nossa adaptação a elas. (p.331)

O caráter cinematográfico refere-se a reconstituição, no cinema, do movimento por meio de cortes imóveis, quase o que propõe Zenão no paradoxo acima. Um movimento que se constituiria de forma ilusória – um movimento gerado por etapas finitas. Segundo Bérgson (2005)

Quando Aquiles persegue a Tartaruga, cada um de seus passos deve ser tratado como um indivisível, cada passo da tartaruga também. Apos um certo numero de passos, Aquiles terá pulado a tartaruga. Nada mais simples. (...) Mas, [no paradoxo], o Aquiles para alcançar a tartaruga procede de forma inteiramente diferente. O movimento considerado por Zenão seria o equivalente ao movimento de Aquiles se pudéssemos tratar o movimento como tratamos o intervalo percorrido, decomponível e recomponível à vontade. (p.337)

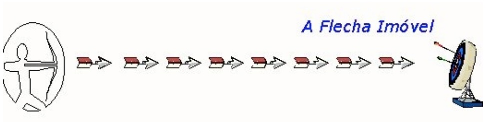
Em outros termos, entendo que Bérgson percebe no paradoxo de Aquiles a possibilidade de pensar a experiência da imagem-movimento – conforme aponta Deleuze – nos permite experienciar o movimento. A falácia no argumento de Zenão na perspectiva bergsoniana é a de que o percurso é divisível, ou seja, pode ser dividida em quantas partes quisermos, assim como o tempo, mas o movimento não. Assim problema do paradoxo *seria supor que o que é verdadeiro da linha (percurso) é verdadeiro do movimento.* (op. cit. p.335). Para Bérgson, os demais paradoxos sofrem da mesma falácia, ou seja, confundir o movimento com percurso.

4.3 Paradoxo da Flecha disparada

Esse paradoxo é assim apresentado por Aristóteles: "o terceiro, pretende que a flecha que voa está parada. Essa conclusão somente pode ser sustentada se se admite que o tempo está composto de *ágoras*". Esse paradoxo é muitas vezes apresentado da seguinte forma: Um arqueiro jamais atingiria o alvo com a sua flecha, pois toda flecha, no ar, se encontra em repouso, uma vez que uma coisa está sempre em repouso quando ocupa um lugar idêntico. Ou seja, a flecha ocupará a cada instante um lugar idêntico a si mesma, estando – a cada instante – em repouso.

Nesse paradoxo Zenão conclui que o movimento é uma sucessão de repouso. Neste caso, o objetivo deste argumento é provar que a seta voadora está em repouso, resultado que se obtém ao se admitir a hipótese de que o tempo é composto de momentos; se não admitirmos esta hipótese, a conclusão – de que o movimento é uma sucessão de repouso[14] - é inviável.

Consideremos a imagem[15]:



O Arqueiro se encontra no ponto A e o Alvo é o ponto B e a flecha se encontra fixa em cada instante.

O argumento de Zenão considera que uma flecha disparada fica imóvel em cada instante, pois, em cada instante ela ocupa um espaço igual a suas dimensões, do contrário ela ocuparia várias posições num só instante, o que é impossível. Ou, dizendo de outra maneira, numa linguagem mais próxima que usamos atualmente, se o espaço e o tempo são discretos, então uma flecha não pode se mover através do ar, pois a cada instante de tempo ela está em um ponto definido e, portanto, em repouso naquele instante (ponto). No instante seguinte ela também estará em repouso e assim sucessivamente, ou seja, em repouso para sempre.

Novamente recorremos a Bérgson, que a respeito desse paradoxo diz: A Flecha estaria imóvel. *Mas, a flecha não está nunca em ponto algum de seu trajeto. Pode-se no máximo dizer que poderia estar num dado ponto, no sentido de que passa por ele e que lhe seria facultado deter-se ali*. Ele ainda argumenta que se fixarmos um ponto C ao Trajeto AB da flecha, e dissermos que num determinado momento a flecha estava em C, então não teríamos mais um percurso, mas dois percursos, um de A para C e outro de C para B com intervalo de repouso. Se há paradas intermediárias, não é mais um único movimento. Novamente Bérgson afirma que embora possamos dividir à vontade o percurso ou a trajetória criada, não se poderia dividir sua criação, que é o ato em progresso [o movimento] e não a coisa. Ou seja: *é transportar para o próprio curso da flecha tudo o que se pode dizer do intervalo percorrido, isto é, admitir a priori esse absurdo de que o movimento coincide com o imóvel.* (Bérgson :2005. p. 334-5)

---

[14] Paul Valery (1871-1945), um poeta que tinha interesse em música, matemática e filosofia, também se encantou com os jogos intelectuais de Zenão. No seu celebrado poema "Le cimetière marin", Valery invoca o paradoxo da flecha em admiráveis versos decassílabos: Numa tradução livre: Zenão! Cruel Zenão! Zenão de Eleia! Tu me feriste com tua flecha alada, Que vibra, voa, e que não voa nada! O som me enleva, e a flecha me mata! [http://ohomemhorizontal.blogspot.com.br/2007/06/256-paul-valery-e-zeno-de-elia.html] acessado 18/05/2013

[15] http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mce13/textos/zenao.htm.] acessado 11/07/2014.

4.4 Paradoxos dos corpos no estádio

Por fim o quarto e último paradoxo apresentado por Zenão e segundo alguns estudiosos é um dos mais complexo. Nele se conclui que a metade é igual ao seu dobro. Aristóteles apresenta esse paradoxo da seguinte forma:

> O quarto argumento supões duas séries contrapostas de corpos de igual numero e magnitude, dispostos desde um e outro dos extremos de um estádio até seu ponto médio, e que se movem em direção contraria à mesma velocidade. Este argumento, pensa Zenão, leva à conclusão de que a metade de um tempo é igual ao dobro desse tempo.

Vamos ver como ele prova isso. Zenão propõe que pensemos em três séries constituídas por um igual número de corpos. Um ao centro e os outros dois: cada um em um dos extremos do estádio que vai de D (direita) à E (esquerda)

<table>
<tr><td rowspan="4">D</td><td colspan="2">A_1 A_2 A_3 A_4</td><td rowspan="4">E</td></tr>
<tr><td>B_1B_2 B_3 B_4</td><td>→</td></tr>
<tr><td>←</td><td>C_1C_2 C_3 C_4</td></tr>
<tr><td colspan="2">A = Corpos em repouso
B = corpos que se deslocam de D para E (D→E)
C = corpos que se deslocam de E para D (D←E)
DE = Estádio</td></tr>
</table>

Observe que os corpos C avançam a metade do corpo A, mas a totalidade de B (deslocam a mesma distância) logo 2A = 4B Já que C_1C_2 equivalem a B_1B_2. Ou, podemos também raciocinar considerando que os conjuntos B e C estejam alinhados com A, como segue:

<table>
<tr><td rowspan="4">D</td><td>A_1 A_2 A_3 A_4</td><td rowspan="4">E</td></tr>
<tr><td>B_1 B_2 B_3 B_4</td></tr>
<tr><td>C_1 C_2 C_3 C_4</td></tr>
<tr><td>A = Corpos em repouso
B = corpos que se deslocam de D para E (D→E)
C = corpos que se deslocam de E para D (D←E)
DE = Estádio</td></tr>
</table>

Neste caso, cada um dos conjuntos terá percorrido duas unidades de A [A_1 A_2] no caso de B e [A_3 A_4] no caso de C, mas terão percorrido quatro unidades do outro conjunto. C terá percorrido [B_1 B_2 B_3 B_4] e B terá percorrido [C_1 C_2 C_3 C_4]. Segundo o argumento de Zenão, para chegarem a isso, os corpos terão percorrido o dobro e a metade da distância no dobro e na metade do tempo. Maciel Jr. (2003) explica da seguinte forma:

> *para Zenão, o tempo que B gastou para percorrer dois pontos de A é igual ao tempo gasto para percorrer quatro pontos de C. Assim, B passará diante de 2A e de 4C no mesmo período de tempo.Para Zenão o tempo gasto para percorrer dois pontos de A é igual ao tempo que B gasto para percorrer quatro pontos de C.Assim, B passará diante de 2A e de 4C no mesmo período de tempo.* (p.101)

Lembrando que o paradoxo pressupõe a identidade do tempo e do espaço cada ponto percorrido corresponde a um instante e a um ponto no espaço. Isso possibilita a Zenão concluir que a metade do tempo é igual ao dobro do tempo. Ou seja, 2A (metade de A) é igual a 4 B (o dobro de A). Analisando esse último paradoxo, Maciel Jr. (2003) ainda afirma:

> Com tais paradoxos, Zenão quis provar que Parmênides tinha razão. Mas quis, igualmente, provar algo mais: o movimento e o múltiplo são impensáveis. Ele não negou a percepção do movimento; não negou que os nossos sentidos percebem o movimento, o múltiplo, a variação; não negou a nossa experiência de vida. O que ele quis for subornar os dados dos sentidos às exigências lógicas do pensamento, para mostrar que a experiência do movimento e da multiplicidade são irracionais. A razão, segundo ele, sempre chega à contradição quando quer pensar o movimento segundo as suas leis lógicas e matemáticas. (p.101-2)

5. Algumas considerações

Ao propor esses paradoxos Zenão preocupava-se em combater teses que se apoiavam numa concepção pluralista do real. Sua crítica vai para além dos paradoxos, mas estes foram de fundamental importância para muitas discussões no campo da filosofia e da matemática que se seguiram.

Na perspectiva de Parmênides a quem Zenão era fiel seguidor, o mundo seria estabelecido por conceitos ordenados racionalmente, pois para eles *o mesmo é pensar e ser*. A introdução e valorização do *logos* e de um determinado *modo lógico* de organizar o pensamento que a escola de eleata destacada por meio de Parmênides e Zenão inspirou grandes filósofos e matemáticos ao longo da história ocidental. Kant, por exemplo, em seu texto da Critica da Razão Pura irá afirmar que *pensamentos sem conteúdos são vazios; intuições sem conceitos são cegas*. Embora o conhecimento comece pelos sentidos, para esse pensador não há experiência que não seja atravessa por conceitos.

Do mesmo modo, muitos matemáticos discutiram e discutem os paradoxos de Zenão. Eles foram e ainda são ótimas referencias para a discussão da relação entre contínuo e discreto, por exemplo, sem considerar os campos da física e da física quântica em que outros conceitos são remetidos a esses paradoxos[16].

Pedagogicamente falando, os quatro exemplos apresentados por Zenão, especialmente os dois primeiros, podem servir de grande apoio ao professor para discutir as ideias sobre o infinitamente grande e infinitamente pequeno, as ideia de densidade que caracteriza os números racionais, ou seja, o fato de que dado dois números entre eles há sempre uma infinidade de outros. O paradoxo de Zenão é muito utilizado como introdução dos estudos sobre de progressão geométrica (PG) e, especialmente para o cálculo da soma de PGs infinitas. Entretanto, desvinculado de seu contexto ele perde sua potencialidade *transgressora*, de se deixar pensar ao contrario do que a experiência nos apresenta. Não quero com isso dicotomizar experiência e pensamento, ao contrario, ao mostrar a não naturalidade ou a complexidade dos debates de ideias no interior do campo da matemática, permitem a todos – professores e alunos – nos aventurarmos em transgredir ou pelo menos questionar informações/afirmações que nos são dadas como prontas acabadas e mais ainda, como se tivessem sido grandes ideias de grandes e solitários gênios.

Os paradoxos nos apresentam situações que contradizem nossa experiência sensitiva mas, que não é facilmente negada. Pois no raciocínio de Zenão, não basta perceber o absurdo, é necessário explicá-lo.

Assim, para além de todas suas contribuições matemáticas os paradoxos podem ser excelentes exercícios ao pensamento ou um convite a pensarmos de modo diferente. Não como ilustração, mas como problemas a serem contra-argumentados ou re-eleaborados. Apresentam-se assim como potencias, como possibilidades de proposição de argumentação. Nesse sentido devemos nos lembrar que em sua criação, estava o desejo do debate, do exercício argumentativo. Hoje, num outro contexto, com muito possibilidades de retórica, o exercício que eles nos possibilitam, ou seja, o refutar ou identificar possibilidades de falácias, novas formas de proposição e esquema de argumentação ainda nos deixam perplexos. Desconstruir os argumentos propostos por Zenão não é tarefa fácil e requer além de muita criação, questionar a centralidade da racionalidade científica em nossa forma de pensar e construir as verdades nos dias atuais.

Podemos destacar ainda das proximidades dos trabalhos desenvolvidos por Dedekind – os cortes de Dedekind em que ele divide o espaço em duas partes ambas infinitas mas limitadas inferior ou superiormente. Como também dos trabalhos de George Cantor. Este último publicou uma série de artigos (no Período de 1874-1884)

[16] A esse respeito ver Morris 1998.

nos quais abordava o conjunto de números infinitos a partir de processos lógicos e matemáticos iniciando seu trabalho a partir da definição de que um conjunto de números é infinito quando pode ser posto em correspondência biunívoca com uma parte de si mesmo.

Desse modo, finalizo afirmando que tais paradoxos apresentam possibilidades para o pensamento da matemática escolar e, possibilidades outras, desde que sejam problematizadas em suas contradições e não usados como simples exemplificações. Os paradoxos nos permite pensar sobre o que hoje se configura numa disciplina denominada matemática, percebendo-a como resultado de muitas disputas, de muitos debates ofuscados do contexto escolar por definições, regras e técnicas. Talvez possamos retomar ou (contra)dizer essa matemática das certezas por meio dos debates sobre as contradições que historicamente se fazem presentes mas também a partir de outros paradoxos ou caminhos que podem submergir (e eu acredito que emergem) mas que nos escapam por estarmos mais preocupados em cumprir programas do que em permitir a elaboração de pensamentos – paradoxais, experimentais, ilusórios, ou seja, permitir um *devir pedagógico*, um *acontecimento*. Talvez.

Bibliografia

AMADEI, F. L. O Infinito um obstáculo no ensino da matemática. 2005. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

BEAUFRET, Jean. O Poema de Parmênides. In Os Pré-Socráticos: fragmentos, doxografia e comentários. Os Pensadores. Trad. José Calvalcante de Souza et al. 2.ed. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

BERGSON, H. A evolução Criadora. São Paulo. Martins fontes. 2005

CASERTANO, Giovani. A cidade, o verdadeiro e o falso em Parmênides. In Kriterion: Revista de Filosofia, Belo Horizonte, v 48 n. 116, p. 307-327, jul/dez.2007

CASTRO, Susana de. Ontologia. Rio de Janeiro: Jorge Zahar. 2008

FREIRIA, A. C. A teoria dos conjuntos de Cantor. Paidéia, Ribeirão Preto, n. 2, p.70-77, 1992.

GARBI. Gilberto G. O Romance das Equações Algébricas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009

LEGRAND, Gerard. Os Pré-Socráticos. Trad. Lucy Magalhães. Rio de Janeiro. Jorge Zahar Editor, 1991.

MACIEL Jr., A. Pré-Socráticos: a invenção da Razão. São Paulo. Odysseus Editora. 2003

MITIDIERI André L. Como e porque (des)ler os clássicos da biografia. Rio Grande do Sul. EDIPUCRS.

VILELA, Denise S. Análise das críticas de Frege a Cantor: a noção de número e o emprego da abstração nas definições. 1996, 124 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas-SP, 1996.

_______. Reflexão filosófica acerca dos significados matemáticos nos contextos da escola e da rua. In: KLUTH, V.; ANASTÁCIO, M. Q. (Orgs.). Filosofia da educação matemática: debates e confluências. São Paulo: Centauro, 2009. p. 81-99.

VILELA, Denise S, DORTA, Deiziele O que é "desenvolver o raciocínio lógico"? Considerações a partir do livro Alice no país das maravilhas. Revista brasileira Estudos pedagógicos. Brasília, v. 91, n. 229, p. 634-651, set./dez. 2010.

VILELA, D. S.; MONTEIRO, A. Paradoxos do infinito e Teoria de Cantor: Desdobramentos para a Filosofia da Educação Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. Anais: Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectiva. SBEM/BRUC, 2013. p. 1-9.